АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VII 1961 Вып. 1

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОНЦЕНТРАТОРА УЛЬТРАЗВУКА

И. Н. Каневский

Получено выражение для потенциала бесконечного сходящегося цилиндрического фронта, с помощью которого в фокальной области построены рельеф распределения модуля потенциала и линии равных фаз. Попутно обсуждаются трудности, связанные с применением формулы Грина для вычисления полей излучателей. Рассмотрено влияние высоты излучателя (конечных размеров)на поле в середине его оси. Экспериментально исследовано строение поля в фокальной области цилиндрического излучателя. Результаты эксперимента сравниваются с теорией.

В работе [1] дан расчет поля в фокальной области сходящегося цилиндрического фронта при равномерном распределении амплитуды по фронту, а также получены формулы, позволяющие вычислить поле в кольцевой области, лежащей вблизи фокуса. Однако желательно иметь более общее выражение, неограниченное требованием равномерности распределения амплитуды по фронту и пригодное для вычисления потенциала как в фокальной области, так и за ее пределами. Для получения такого выражения воспользуемся формулой Грина для двумерной задачи, как это было сделано в первой части работы [1]:

$$\Phi = \int\limits_C \left[\Phi_\Sigma \frac{\partial H_0(kR)}{\partial n} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_\Sigma H_0(kR) \right] dl. \qquad (1)$$

Здесь Φ — значение потенциала скорости; $H_0(kR)$ — функция Ханкеля второго рода. Если временна́я зависимость выбрана в виде $e^{-i\omega t}$, то эта функция описывает сходящуюся цилиндрическую волну, R — расстояние от излучающей поверхности до точки наблюдения. Знак $\partial/\partial n$ означает производную по направлению внешней нормали к контуру интегрирования C с элементом dl, а значения величин с индексом Σ заданы на цилиндрической поверхности бесконечной длины.

Следует подчеркнуть, что (при условии непрерывности) значения потенциала и его нормальной производной могут быть заданы на поверхности Σ произвольно. Кроме того, контур C должен быть замкнутым. Тогда потенциал, вычисленный по формуле (1), будет точным решением волнового уравнения и будет точно удовлетворять граничным условиям*.

Однако часто приходится задавать значения потенциала на незамкнутых цилиндрических поверхностях. Именно так обстоит дело при вычислении полей излучателей в целом ряде практических случаев. Тогда, для того чтобы воспользоваться формулой (1), поверхность излучателя дополняют до замкнутой, контур C замыкают в бесконечности и полагают на дополнительной его части, не совпадающей с излучателем, значения потенциала и его нормальной производной равными нулю. Однако, несмотря на такую операцию, формула (1), строго говоря, перестает быть справедливой, так как, во-первых, потенциал и его нормальная производная на границе терпят разрыв и, во-вторых, при условии равенства нулю двумерного потенциала и его нормальной производной на конечном от-

* В случае внешней задачи для ее однозначности необходимо граничные условия дополнить принципом излучения, которым задается поведение волн в бесконечности.

резке, потенциал должен обратиться в нуль во всей рассматриваемой области [2]. Если второй противоречивый результат можно устранить в тех случаях, когда удается построить функцию источника [2], то первый неустраним принципиально, так как присущ самому методу расчета, связанному с предположением об отсутствии поля на дополнительной поверхности. Несостоятельность этого предположения очевидна из физических соображений: вблизи края излучателя поле не имеет резкой границы из-за дифракции, следовательно, в окрестности точки предполагаемого разрыва поле на дополнительной поверхности не обращается в нуль. Избежать подобных противоречий можно в том случае, когда применяются методы, позволяющие получить точное решение дифракционной задачи, как это сделано в работе [3] с помощью интеграла Зоммерфельда. Однако этот метод не является общим, так как представить решение в виде интеграла Зоммерфельда удается в исключительных случаях [2].

Другая трудность использования формул (1) состоит в необходимости одновременного задания потенциала и его нормальной производной, в то время как эти величины не являются независимыми. Иногда граничные условия удается задать точно, чаще же приходится оперировать с их приближенными значениями.

Однако во многих случаях формула (1), несмотря на указанные выше противоречивые предположения и трудность задания граничных условий, позволяет вычислить дифракционную структуру полей со степенью точности, достаточной для практики. При этом решающую роль играет подтверждение экспериментом теоретических результатов.

В настоящей работе будет исследовано излучение поверхности, представляющей часть прямого кругового цилиндра и создающей сходящийся цилиндрический фронт. Расчет поля будет основан на формуле (1), причем ряд выводов теории будет проверен экспериментально.

В случае прямого кругового цилиндра элемент контура $dl = f d\alpha$, $R = \sqrt{f^2 + r_0^2 - 2fr_0 \cos(\alpha - \alpha_0)}$, r_0, α_0 — полярные координаты точки наблюдения с полюсом на оси фронта (см. [1]).

Вычисляя нормальную производную

$$\frac{\partial H_0(kR)}{\partial n} = kH_1(kR) \cdot \frac{f - r\cos(\alpha - \alpha_0)}{R}$$

и используя теорему сложения цилиндрических функций в форме Графа [4]

$$H_\nu(kR) = \frac{1}{\cos \nu\psi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{\nu+n}(kf) J_n(kr) \cos n(\alpha - \alpha_0),$$

в которой $\cos\psi = [f - r\cos(\alpha - \alpha_0)]/R$, получим из выражения (1) представление потенциала в виде бесконечного ряда:

$$\Phi = -\frac{if}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(kr) \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} \left[k\Phi_\Sigma H_n'(kf) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Sigma H_n(kf)\right] \cos n(\alpha - \alpha_0)\, d\alpha,$$

$$\varepsilon_n = 2 \text{ при } n = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_n = 1 \text{ при } n \neq 0. \tag{2}$$

Здесь мы воспользовались равномерной сходимостью ряда при перестановке суммы и интеграла.

При $kf \gg 1$ справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$H_n'(kf) = -iH_n(kf) = \sqrt{\frac{2}{\pi kf}}\, e^{i(kf - \pi/4 - n\pi/2)}.$$

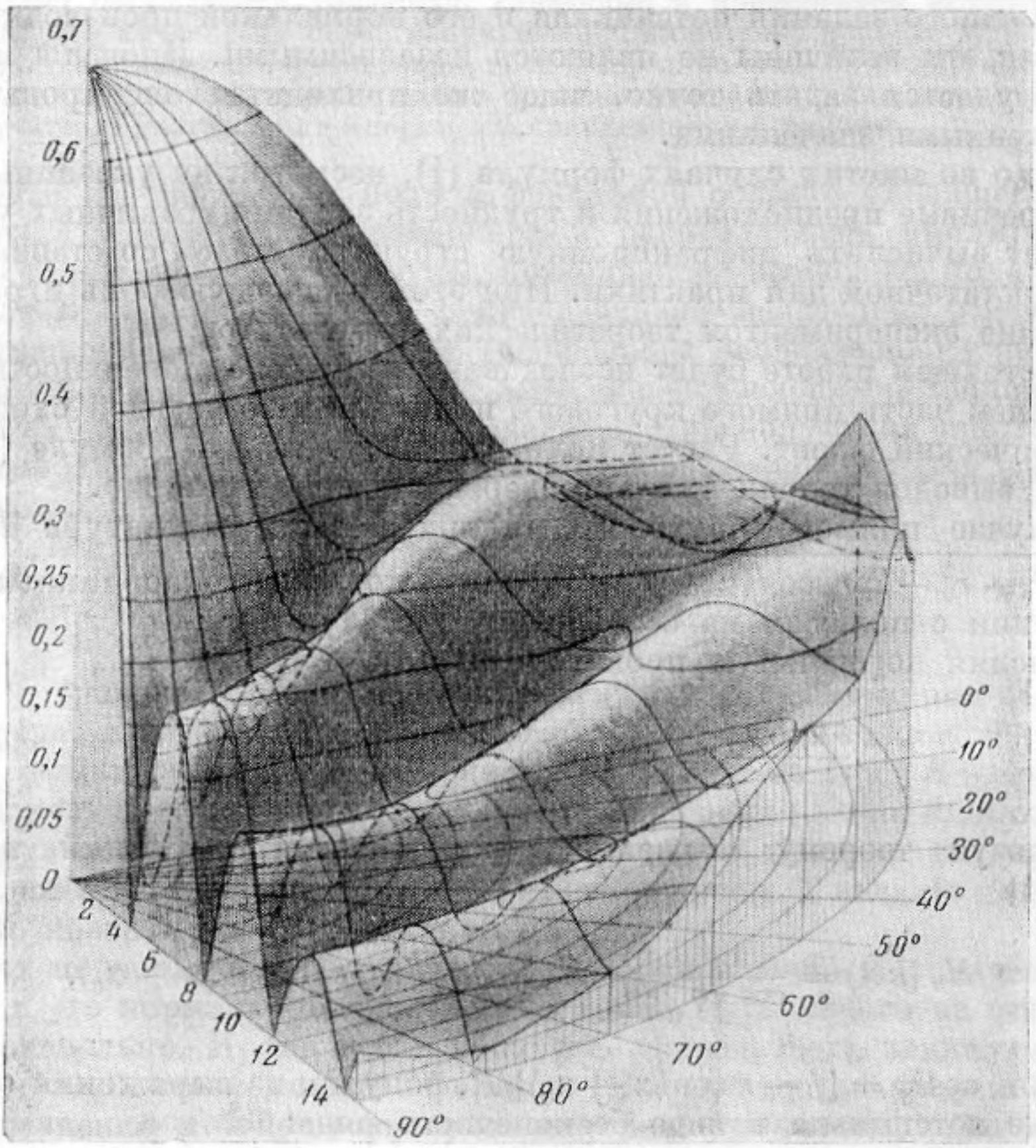
При этом же условии (см. [1])

$$v_\Sigma = -ik\Phi_\Sigma = v_0\Psi(\alpha),$$

где v_0 — амплитуда скорости, а $\Psi(\alpha)$ — функция ее распределения на поверхности Σ. Используя два последних соотношения и формулу (2), получим

$$\Phi = v_0\sqrt{\frac{\pi f}{2k\pi}}\,e^{-i(kf-3\pi/4)}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n e^{in\pi/2}J_n(kr)\int_{-\alpha_m}^{\alpha_m}\Psi(\alpha)\cos n(\alpha-\alpha_0)\,d\alpha. \quad (3)$$

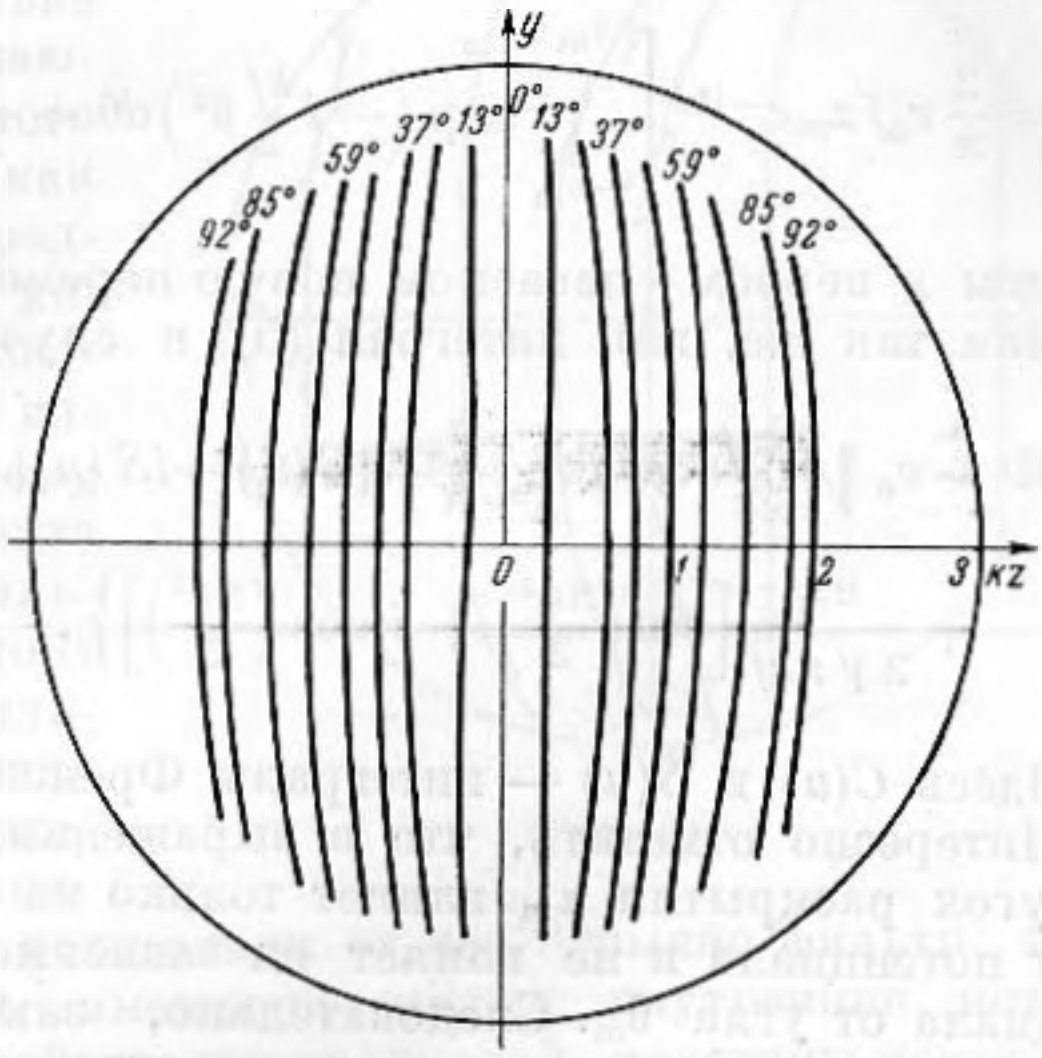
При помощи выражения (3) нами построен рельеф распределения потенциала в фокальной области бесконечного сходящегося цилиндрического фронта с углом раскрытия $\alpha_m = 60°$ и равномерным распределением амплитуды по фронту. В горизонтальной плоскости фиг. 1 отложены полярные координаты точки наблюдения (r_0 и α_0), а в вертикальном направлении — величины, пропорциональные значению модуля потенциала. Направление $\alpha_0 = 0$ соответствует оптической оси z, ортогональной к фокальной плоскости. Направление $\alpha_0 = 90°$ соответствует оси y, которая лежит в фокальной плоскости. Вертикальная ось (x) совпадает с фокальной «линией» сходящегося фронта. На фиг. 1 показан только один квадрант, так как картина поля симметрична относительно осевой и фокальной плоскостей.



Фиг. 1

Фиг. 1 дает полное представление о распределении потенциала в фокальной области. Из фигуры видно, что в направлении оси y, в фокальной плоскости, потенциал имеет систематические нули, в то время как в осевой плоскости (в направлении оси z) он имеет только минимумы, не достигающие нуля.

Главный максимум потенциала имеет вытянутую форму в направлении распространения волны (в направлении оси z). При движении по азимуту от 0 до 90° минимумы потенциала в направлении радиуса становятся все более глубокими.



Фиг. 2

Общие закономерности распределения потенциала, отмеченные на фиг. 1, не зависят от угла раскрытия фронта, и являются характерными для сходящихся цилиндрических фронтов.

При изменении угла раскрытия фронта изменяется только масштаб структуры поля. С уменьшением угла раскрытия картина поля, изображенная на фиг. 1, расплывается: расстояние от оси до первого минимума увеличивается, максимумы становятся более пологими. При увеличении угла раскрытия наблюдаются обратные явления. Выражение (3) позволяет также построить фронты волн в фокальной области. Фронт волны — это поверхность, на которой фаза имеет постоянное значение. Из выражения (3) следует, что фаза цилиндрической сходящейся волны

$$\varphi = \operatorname{ar\,ctg} \frac{\operatorname{Im}(\Phi)}{\operatorname{Re}(\Phi)}, \tag{4}$$

где $\operatorname{Im}(\Phi)$ и $\operatorname{Re}(\Phi)$ — соответственно мнимая и действительная части выражения (3). При помощи формулы (4) построены линии равных фаз, показанные на фиг. 2, из которой видно, что эти линии — почти прямые, параллельные фокальной плоскости. Отсюда следует, что в фокальном пятне с достаточной степенью точности фронты волн можно рассматривать как плоские.

Полученные выше результаты справедливы для цилиндрического фронта бесконечной длины. Так как все реальные излучатели имеют ограниченные размеры, то необходимо рассмотреть зависимость потенциала от длины излучающей поверхности. Для упрощения расчета рассмотрим эту зависимость только для середины оси фронта. Тогда потенциал дается следующим выражением [1]:

$$\Phi = \frac{v_0 f \alpha_m}{\pi} \int\limits_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{e^{-ikf\cos^{-1}\theta}}{\cos\theta}\, d\theta, \tag{5}$$

где $\theta_m = \operatorname{arctg}(h/f)$ — угол между прямой, соединяющей центр оси излучателя с его торцом (верхним или нижним), и проекцией этой прямой на плоскость, ортогональную к фокальной линии и проходящую через ее середину; h — половина высоты излучателя.

Для вычисления интеграла (5) рассмотрим отдельно два случая: первый, когда угол θ_m велик, и второй, когда угол θ_m мал. В первом

случае интеграл (5) легко вычисляется методом перевала по контуру, показанному на фиг. 3:

$$\Phi = v_0 \alpha_m \sqrt{\frac{2f}{k\pi}}\, e^{-i(kf-3\pi/4)} \left[1 - i\sqrt{\frac{2}{\pi kf}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\theta_m} e^{-i\beta}\right],$$

где $\beta = kf/\cos\theta_m - kf - \pi/4$.

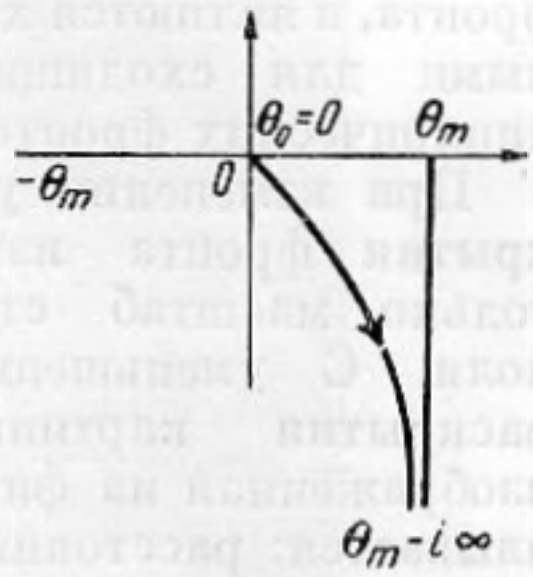
Если угол θ_m мал, то разлагая косинусы в ряды и ограничиваясь квадратичными членами, получим

$$\Phi = \frac{2}{\pi} v_0 f \alpha_m e^{-ikf} \left[\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \exp\left(-i\frac{kf}{2}\theta^2\right) d\theta + \frac{1}{2}\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \theta^2 \exp\left(-i\frac{kf}{2}\theta^2\right) d\theta\right]. \quad (6)$$

Введем в первом слагаемом новую переменную $u = \sqrt{kf/\pi}\,\theta$, а второе вычислим так же, как интеграл (5) в случае больших углов θ_m. Тогда

$$\Phi = v_0 \sqrt{\frac{\pi f}{k}} \cdot e^{-ikf} \cdot \frac{2\alpha_m}{\pi} \left\{[C(u) - iS(u)] + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta_m}{2\sqrt{\pi kf}} \left[\sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right)\right]\right\}. \quad (7)$$

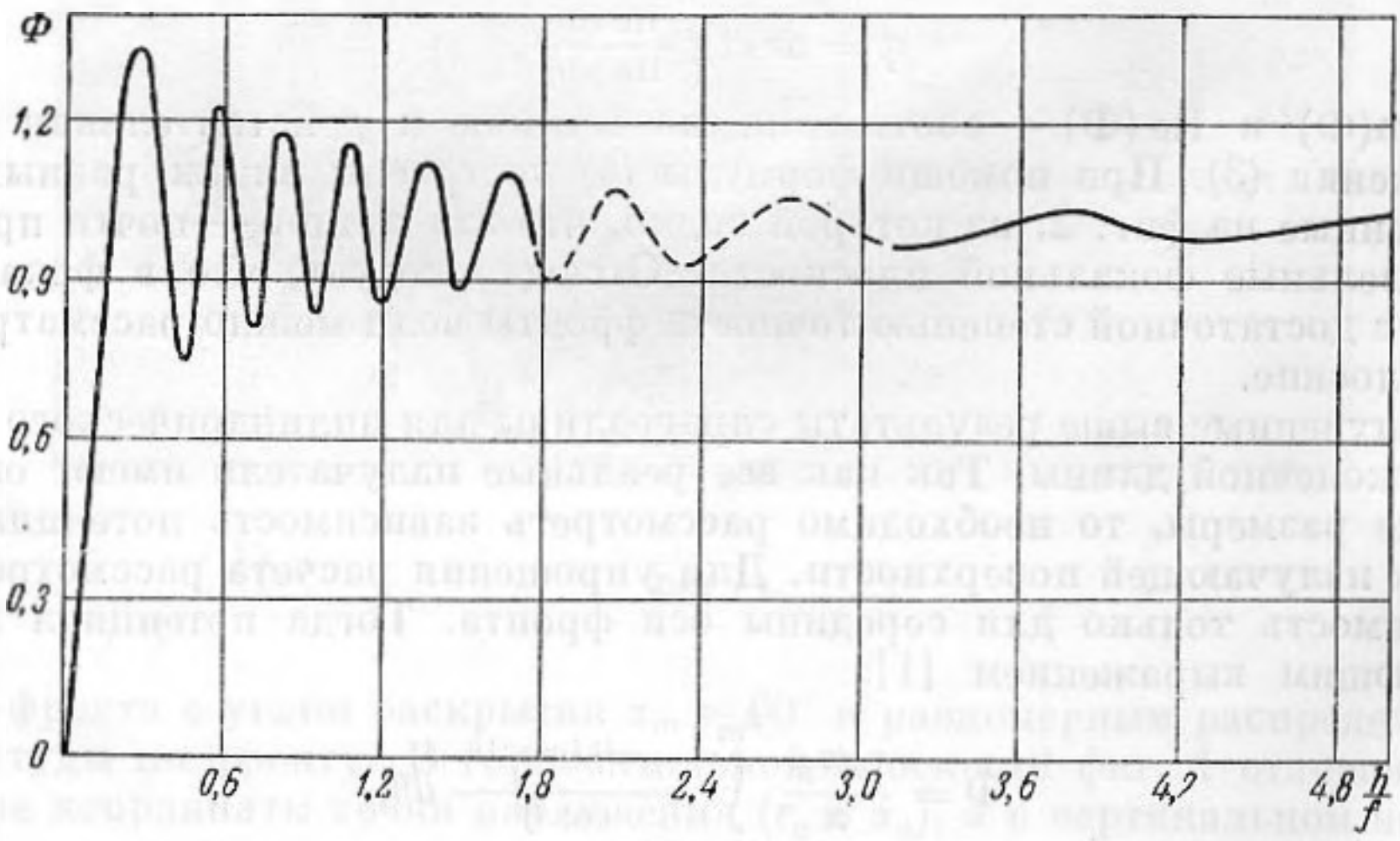


Фиг. 3

Здесь $C(u)$ и $S(u)$ — интегралы Френеля.

Интересно отметить, что в выражениях (6) и (7) угол раскрытия α_m влияет только на амплитуду потенциала и не влияет на зависимость потенциала от угла θ_m. Следовательно, закономерности, даваемые этими выражениями, справедливы для фронтов с любыми углами раскрытия.

При помощи формул (6) и (7) построена зависимость модуля потенциала в середине оси цилиндрического фронта от длины излучающей поверхности, показанная на фиг. 4. По оси абсцисс отложено отношение половины длины излучающей поверхности h к радиусу ее кривизны f. По оси ординат отложена величина $|\Phi|\sqrt{k/\pi f}\,(\pi/2\alpha_m v_0)$. Левая часть кри-

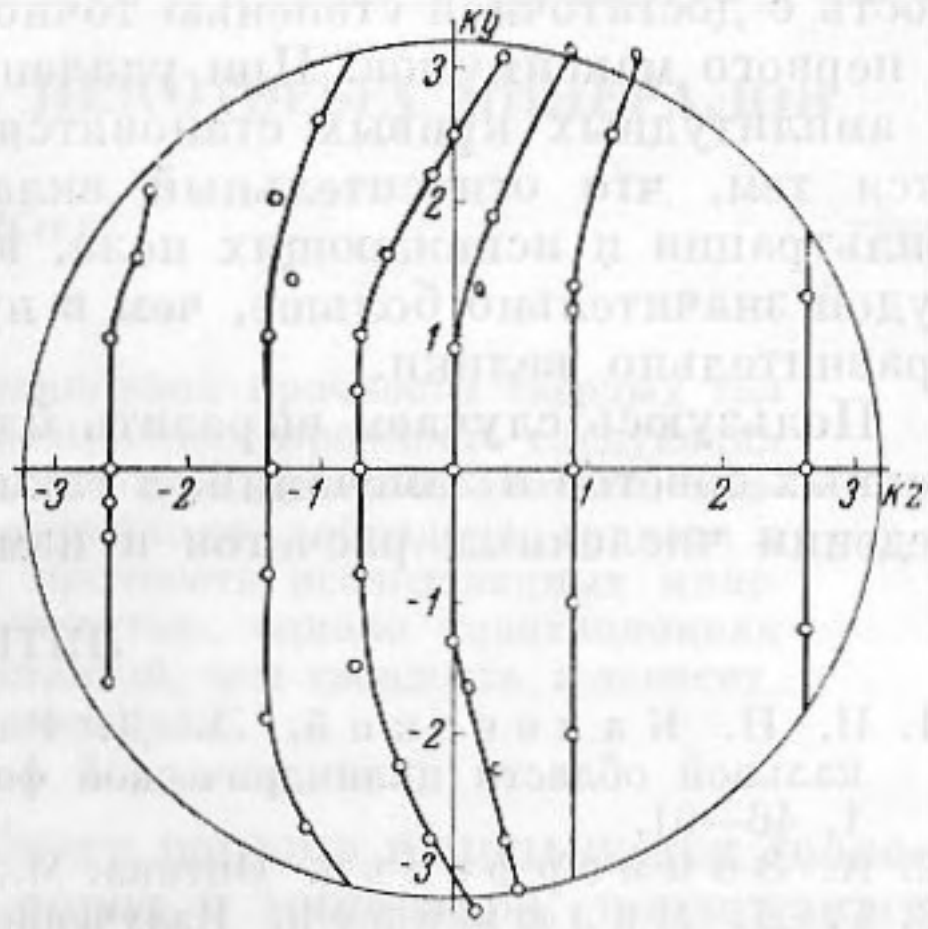


Фиг. 4

вой построена по формуле (7), а правая — по формуле (6). В области пунктирной части кривой оба выражения дают большую погрешность. Поэтому пунктирная часть показывает только ориентировочно ход кривой в интервале значений h/f от 1,75 до 3,1. Из графика видно, что если длина

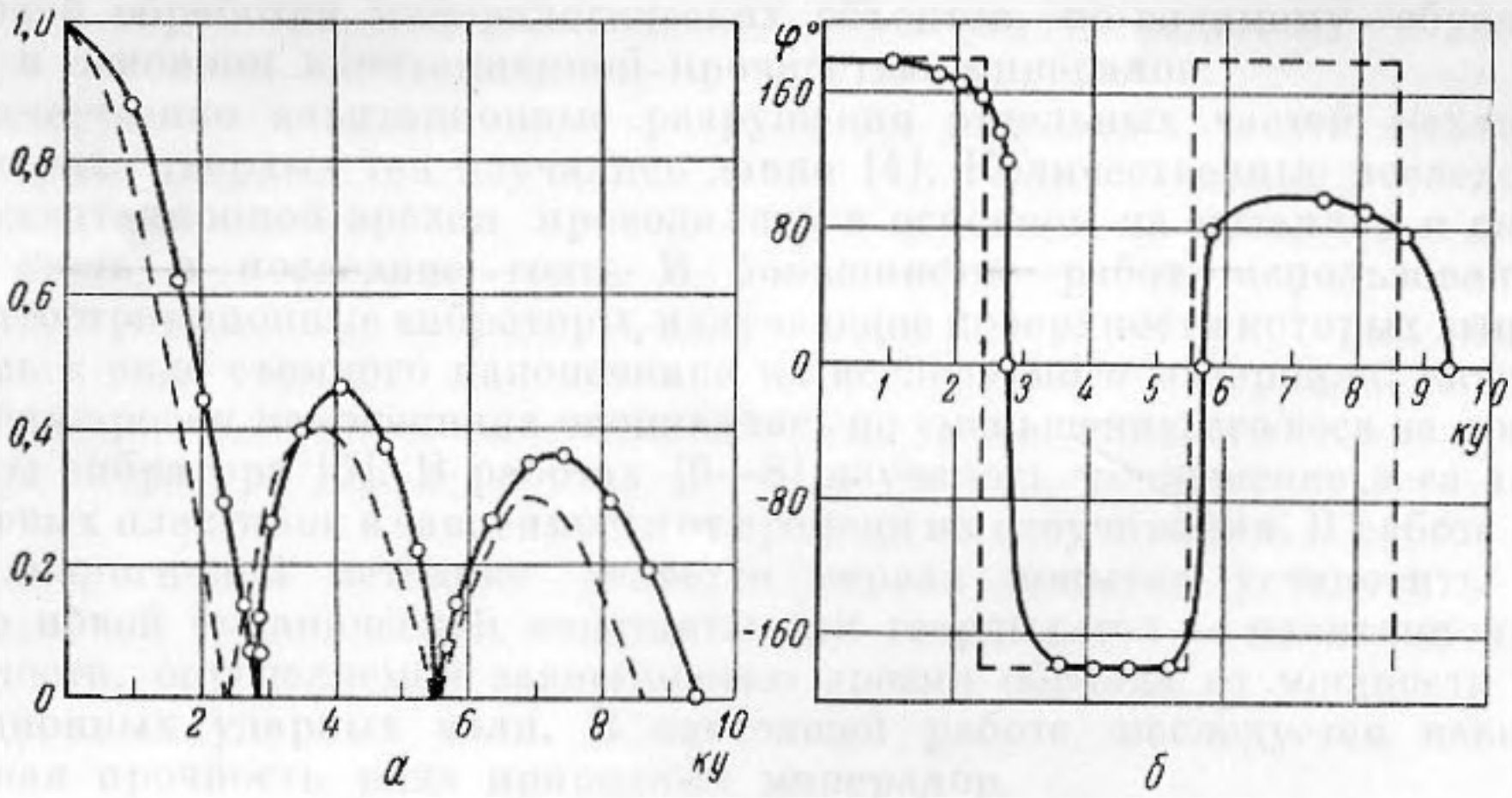
излучающей поверхности больше ее диаметра ($h/f > 1$), то потенциал в середине оси конечного фронта отличается от потенциала бесконечного фронта менее чем на 15%.

Некоторые из полученных теоретических результатов были проверены экспериментально на цилиндрических излучателях из керамики титаната бария. Эти излучатели, вообще говоря, создают цилиндрический волновой фронт, модулированный по амплитуде, вследствие неоднородного движения излучающей поверхности [5]. Поле такого фронта можно рассматривать как результат суперпозиции однородной цилиндрической волны и косых пучков, вызванных паразитными колебаниями излучателя из-за наличия торцов [6]. Поэтому для создания однородного фронта необходимо принимать специальные меры, одна из которых состоит в применении полуволнового фильтра, представляющего часть цилиндрической поверхности, расположенной коаксиально с поверхностью излучателя на некотором расстоянии от нее. Обычно фильтр изготавливается из дюралюминия, имеющего малые внутренние потери. Работа фильтра основана на свойстве полуволновой пластины почти полностью пропускать волны, падающие нормально к ее поверхности, и ослаблять волны, идущие под углом к нормали. В результате применения фильтра значительно ослабляются косые пучки.



Фиг. 5

Описываемые ниже экспериментальные результаты получены после устранения искажений поля преобразователя при помощи полуволнового



Фиг. 6

фильтра. Исследования проводились на установке, описанной в работе [7], с добавлением двулучевого осциллографа, который применялся для измерения сдвигов фаз.

На фиг. 5 показаны линии равных фаз в фокальной области цилиндрического преобразователя с углом раскрытия $\alpha_m = 60°$, работающего на резонансной частоте 830 *кгц*. Из сравнения фиг. 5 и 2 видно, что выводы

теории достаточно хорошо подтверждаются экспериментом: вблизи оси z линии равных фаз — почти прямые, параллельные фокальной плоскости.

На фиг. 6 приведены кривые распределения амплитуды (*а*) и фазы (*б*) вдоль оси y полуцилиндрического концентратора. Обе кривые снимались по точкам одновременно. Согласно теоретическим данным, изменение фазы должно происходить скачками от $+180$ до $-180°$. Эта закономерность с достаточной степенью точности соблюдается только для нулевого и первого максимумов. При удалении от оси фронта искажения фазовых и амплитудных кривых становятся более значительными. Это объясняется тем, что относительный вклад косых пучков, оставшихся после фильтрации и искажающих поле, в боковые максимумы с малой амплитудой значительно больше, чем в нулевой и первый, амплитуды которых сравнительно велики.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Л. Д. Розенбергу за ряд ценных советов и замечаний, а также А. Д. Карюгиной за помощь в проведении численных расчетов и измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Каневский, Л. Д. Розенберг. Расчет звукового поля в фокальной области цилиндрической фокусирующей системы. Акуст. ж., 1957, 3, 1, 46—61.
2. А. Зоммерфельд. Оптика. М., ИЛ, 1953.
3. Г. Д. Малюжинец. Излучение звука колеблющимися гранями произвольного клина. Акуст. ж., 1955, 1, 2, 144—164.
4. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949, ч. I, гл. XI.
5. И. Н. Каневский. Экспериментальное исследование цилиндрических фокусирующих систем. Акуст. ж., 1960, 6, 1, 123—124.
6. И. Н. Каневский. Об анализе искажений поля плоского пьезоэлектрического излучателя. Докл. АН СССР, 1959, 129, 4, 766—768.
7. И. Н. Каневский. Установка для измерений ультразвуковых полей в жидкости. Измерит. техн., 1959, 8, 51—54.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
10 мая 1960 г.