

приема. Измеряя разность фаз отраженных волн, соответствующих различным уровням жидкости, можно вычислить по результатам измерения изменение высоты уровня жидкости по формуле (3). При непрерывном изменении высоты уровня жидкости в сосуде фаза отраженного импульса может многократно проходить через  $0^\circ$  и  $180^\circ$ . Измеряя каким-либо из существующих способов непрерывно меняющуюся фазу, можно определить изменение высоты уровня жидкости.

Для проверки метода были сделаны опыты с алюминиевой полосой, имеющей размеры  $930 \times 15 \times 1,5$  мм. Полоса погружалась в сосуд с водой. Излучатель, представляющий собой продольно колеблющийся пакет кристаллов фосфата аммония, крепился на одном конце полосы так, что он возбуждал в полосе изгибные колебания.

Для указанных размеров алюминиевой полосы чувствительность установки составляет около 10 градусов изменения фазы на 1 мм изменения высоты уровня жидкости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГТТИ, 1953, стр. 762.

Акустический институт АН СССР  
Москва

Поступило в редакцию  
21 мая 1959 г.

### ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ, СОХРАНЯЮЩИЕ ФОРМУ ПРОФИЛЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ

*М. А. Исакович*

Для большинства видов волн, встречающихся в механике сплошных сред, форма профиля бегущей волны конечной амплитуды меняется при ее распространении. Профиль сохраняется только в аппроксимации бесконечно малых амплитуд (линеаризация уравнений), причем при наличии дисперсии — лишь для волн синусоидальной формы. Примерами могут служить продольные и поперечные волны в неограниченной среде, гравитационные и капиллярные волны на поверхности жидкости и тому подобное. Поперечные волны на струне являются исключением: любая бегущая волна произвольной амплитуды сохраняет форму своего профиля неизменной. Ниже показано, что для изгибных волн на стержне имеет место промежуточный случай: распространение волн конечной амплитуды без изменения формы профиля возможно, но лишь для некоторых определенных форм.

Обозначим длину дуги профиля (то есть кривой, образованной средней линией стержня) через  $s$ , а кривизну профиля — через  $\kappa$ . Как известно, между перерезывающей силой  $F$  и изгибающим моментом  $M$  имеет место соотношение  $F = -dM/ds$ . С другой стороны, изгибающий момент пропорционален кривизне:  $M = G\kappa$ , где  $G$  — постоянная, зависящая от упругих свойств материала стержня и от размеров и формы его поперечного сечения. Следовательно,  $F = -Gd\kappa/ds$ .

Профили изгибных волн, распространяющихся без изменения формы, будем искать, пользуясь известным методом «остановки движения». Именно, введем систему координат, движущуюся относительно стержня с той же скоростью  $v$ , что и профиль волны; относительно этой системы профиль будет неподвижен, а частицы стержня будут «протекать» по профилю в обратную сторону с некоторой постоянной скоростью  $v$ . Соответствующая центробежная сила для элемента стержня длины  $ds$  равна  $\rho v^2 \kappa ds$ , где  $\rho$  — линейная плотность стержня. Равнодействующая же сил, действующих на данный элемент стержня со стороны соседних элементов, равна  $(dF/ds) ds$  и направлена также по нормали к профилю. Приравнявая обе силы и учитывая предыдущую формулу, получаем  $d^2\kappa/ds^2 + \rho v^2/G\kappa = 0$ . Это уравнение представляет собой условие, налагаемое на форму профиля требованием неизменности этой формы, т. е. требованием осуществимости «остановки движения». Выбирая соответственное начало отсчета дуг и вводя удобные для дальнейшего обозначения, находим  $\kappa = -k^2 a \sin ks$ , или  $\varphi = ka \cos ks$ , где  $\varphi$  — угол наклона средней линии стержня к оси  $x$ , которую будем считать совпадающей с невозмущенным положением средней линии. При этом должно выполняться соотношение  $v = k\sqrt{G/\rho}$ . Таким образом, без изменения формы распространяются такие и только такие изгибные волны, для которых кривизна профиля (или угол поворота средней линии) есть синусоидальная функция длины дуги средней линии.

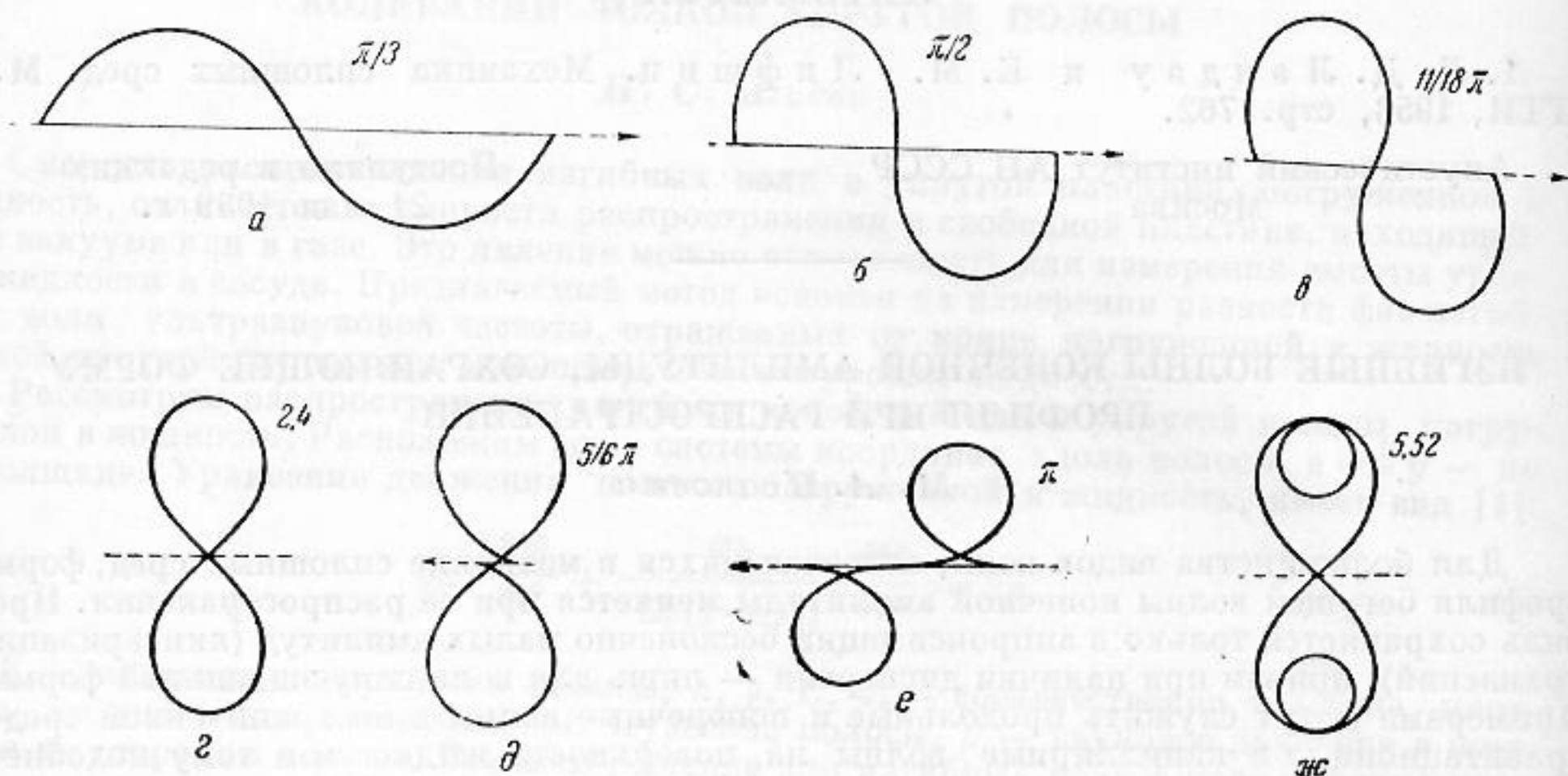
Заметим, что для малых амплитуд  $ka$  угла поворота средней линии можем положить  $s \approx x$  и, в том же приближении,  $\kappa \approx d^2y/dx^2$ , где  $y$  — поперечное смещение точек стержня от положения равновесия. Тогда приходим, естественно, к обычному решению линеаризованного уравнения изгибных колебаний  $y = a \sin kx$ , что и оправдывает сделанный выбор обозначений.

Из полученных формул ясно, что длина волны для кривизны или углов поворота средней линии, считая вдоль средней линии, равна  $\lambda = 2\pi/k$ , так что  $k$  можно считать волновым числом этой волны. Соответствующая частота  $\omega$  гармонического изменения  $\kappa$

или  $\varphi$  в каждой точке, связанной со стержнем, удовлетворяет равенству  $v = \omega \sqrt{G/\rho}$ . Полученные выше соотношения полностью совпадают по форме с соответственными дисперсионными формулами для изгибных волн малой амплитуды. Однако здесь скорость  $v = \omega/k$  не равна скорости  $c$  профиля относительно «неподвижной» системы координат, в которой стержень в целом покоится; отношение этих скоростей равно отношению длины волны, считая вдоль оси  $x$ , к длине волны  $\lambda$ , отсчитываемой вдоль средней

линии:  $c/v = \left( \int_0^\lambda \cos \varphi ds \right) / \lambda$ , откуда, подставляя найденное выражение для  $\varphi$ , находим:

$c = v J_0(ka)$ . Таким образом, в то время как период волны в «неподвижной» системе координат зависит только от ее длины вдоль средней линии, скорость профиля оказывается зависящей не только от длины, но и от амплитуды волны.



Примеры профилей неизменной формы одинаковой длины волны и частоты, но разных амплитуд. Числа обозначают значения  $ka$ ; участок оси абсцисс между концами профиля изображает в масштабе скорость данного профиля; скорость профилей  $г$  и  $ж$  равна нулю

Найденное решение есть внутреннее уравнение волны неизменной формы. Записать в конечном виде уравнение профиля в декартовых координатах не удастся, однако кинематические устройства, вычерчивающие профиль, принципиально очень просты. Так, например, можно представить себе вычерчивание профиля при помощи «режущего колесика», типа, применяемого в планиметрах. При постоянной скорости качения, колесико, ось которого совершает синусоидальные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, прорежет соответственный профиль. Профиль можно вычертить также при помощи неподвижного карандаша, прижатого острием к центру диска, совершающего угловые колебания по закону синуса, если вдоль одного из диаметров диска равномерно протягивать бумагу.

На фигуре показано для примера несколько профилей для разных амплитуд при одной и той же длине волны, считая вдоль средней линии. Начиная с некоторой амплитуды, появляется самопересечение профилей. Если бы возник вопрос о реальном осуществлении таких волн, то для профилей с самопересечениями пришлось бы придавать профилю малое кручение, выводя его из одной плоскости. При значениях  $ka$ , равных нулям бесселевой функции нулевого порядка ( $ka = 2,4; 5,52; \dots$ ) профиль периодически описывает одну и ту же петлю. В этом случае волна может быть изображена отрезком размерами в одну длину волны, концы которого жестко соединены друг с другом. При переходе через нули бесселевой функции знак скорости профиля относительно «неподвижной» системы координат меняется на обратный, что указано направлением стрелки на фигуре.

В заключение сделаем еще одно замечание. Для любой среды линеаризация уравнений распространения возмущений приводит одновременно как к наличию волн неизменного профиля (а именно, синусоидальных волн), так и к применимости принципа суперпозиции. Однако из наличия в той или иной среде волн неизменного профиля принцип суперпозиции для этих волн вывести нельзя: действительно, для струны и для стержня волны неизменного профиля конечной амплитуды существуют, однако, как легко видеть, принцип суперпозиции для этих волн несправедлив.

Пользуюсь случаем выразить благодарность В. С. Соколовой, выполнившей построение профилей, показанных на приведенной фигуре.

Акустический институт АН СССР  
Москва

Поступило в редакцию  
16 сентября 1959 г.