На фиг. 1 для примера представлена спектрограмма тепловых шумов цилиндрического гидрофона из титаната бария с тангенциальной поляризацией. Как видно, имеет место разброс точек, который можно уменьшить путем увеличения времени усреднения. Разброс показаний, а также дрейф нуля определяют величину погрешности и предел чувствительности аппаратуры. На фиг. 2 приводятся вычисленные по тепловым шумам частотные характеристики в режиме холостого хода для трех гидрофонов цилиндрического типа из титаната бария (кривые *а*) без учета коэффициента концентрации и к.п.д., которые предполагались $\Omega = 1$ и $\eta = 100\%$. Сравнение этих характеристик с полученными методом взаимности (кривые *б*) указывает на их сходство, в частности на совпадение по частоте максимумов на кривых. Имеющиеся расхождения вполне объяснимы, если учесть грубые предположения, принятые в отношении коэффициента концентрации и к.п.д.

Предполагая излучающими только боковые поверхности цилиндрического гидрофона, с достаточной точностью можно принять, если длина гидрофона равна его диаметру $l = D = 2a$ (Si — интегральный синус):

$$\Omega = \frac{(ka)^2}{kaSi2ka - \sin^2 ka}, \tag{5}$$

т. е. коэффициент концентрации такой же, как и у линейного источника длины $l = 2a$. Принимая значения $\eta = 14\%$ — для первого гидрофона ($D = 42$ *мм*), 8% — для второго ($D = 42$ *мм*) и 50% — для третьего ($D = 71$ *мм*), с учетом коэффициента концентрации в соответствии с (5), можно получить хорошее совпадение с результатами измерений методом взаимности (кривые *б* на фиг. 2). Таким образом, помимо оценки частотных характеристик чувствительности преобразователей, предложенный метод позволяет по результатам калибровки чувствительности другими методами при известных коэффициентах концентрации оценить к.п.д. преобразователей.

Следует отметить, что применимость описанного метода ограничена пределом чувствительности спектрального анализатора ς_0, а минимально измеримые значения E и R можно определить в соответствии с формулами (1) и (2), если взять $\mathrm{Re}Z = \varsigma_0$, например при наших измерениях мы имели $\varsigma_0 = \sim 5$ *ом*.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность В. А. Красильникову и Л. М. Бреховских за полезное обсуждение данной работы, а также А. А. Ананьевой, любезно предоставившей в наше распоряжение пьезоэлектрические гидрофоны.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Фурдуев. Теоремы взаимности. Гостехиздат, 1948.
2. E. L. Carstensen. Калибровка электроакустических преобразователей методом самовзаимности. J. Acoust. Soc. America, 1947, 19, № 6, 961—965.
3. G. A. Sabin. Калибровка преобразователей путем измерений импеданца. J. Acoust. Soc. America, 1956, 28, 4, 705—710.
4. К. В. Гончаров и В. А. Красильников. Тепловые механические колебания (флюктуации) пьезоэлектрических кристаллов. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1956, 20, 2, 231—236.
5. В. С. Воюцкий. Обнаружение слабых сигналов способом асинхронного накопления. Радиотехника, 1954, 7, 6, 3—9.
6. А. А. Харкевич. Очерки общей теории связи. Гостехиздат, 1955, стр. 246—249.

Кафедра Акустики
Московского государственного университета

Поступило в редакцию
15 ноября 1957 г.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВУКА ТОНКИМИ УПРУГИМИ ОБОЛОЧКАМИ И ПЛАСТИНКАМИ

Л. М. Лямшев

Задача об излучении звука тонкой упругой оболочкой или пластинкой может быть сформулирована следующим образом. Требуется найти решение волнового уравнения

$$(\Delta + k^2)\, p^{(1)}(r) = 0 \tag{1}$$

в пространстве, окружающем упругую оболочку, которая совершает гармонические колебания под действием внешней распределенной по поверхности оболочки сторонней механической силы $F^1(r)$. Решение должно удовлетворять условию излучения на бесконечности и условию равенства нормальных смещений на границе оболочки с окружающей средой

$$-\frac{1}{\omega^2\rho}\frac{\partial^2 p^{(1)}(r)}{\partial n}\Big|_S = w^{(1)}(r). \tag{2}$$

В выражении (2) $w^{(1)}(r)$ — нормальное перемещение поверхности оболочки, подчиняющееся уравнению движения

$$Lw^{(1)}(r) = F^{(1)}(r) - p^{(1)}(r)\Big|_S, \tag{3}$$

где L — самосопряженный дифференциальный оператор, определенный в области на поверхности S.

Искомое решение можно получить, не рассматривая краевой задачи, если воспользоваться уже известным решением дифракционной задачи о поле точечного источника в окружающем оболочку пространстве. В самом деле, пусть известно решение волнового уравнения

$$(\Delta + k^2)\, p^{(2)}(r) = -Q_0^{(2)}\,\delta(r - r_1), \tag{4}$$

удовлетворяющее условию излучения на бесконечности и краевым условиям

$$-\frac{1}{\omega^2\rho}\frac{\partial^2 p^{(2)}(r)}{\partial n}\Big|_S = w^{(2)}(r), \tag{5}$$

$$Lw^{(2)}(r) = -p^{(2)}(r)\Big|_S. \tag{6}$$

Умножим уравнение (1) на $p^{(2)}(r)$, а (4) на $-p^{(1)}(r)$ и сложим их. Проинтегрировав результат по всему пространству V, получим

$$\int_V [\Delta p^{(1)}(r)\, p^{(2)}(r) - \Delta p^{(2)}(r)\, p^{(1)}(r)]\, dv = Q_0^{(2)}\, p^{(1)}(r_1). \tag{7}$$

Объемный интеграл в левой части выражения (7) преобразуем в поверхностный, воспользовавшись формулой Грина,

$$\int_V [\Delta p^{(1)}(r)\, p^{(2)}(r) - \Delta p^{(2)}(r) p^{(1)}(r)] dv = -\int_S \left[\frac{\partial p^{(1)}(r)}{\partial n}\, p^{(2)}(r) - \frac{\partial p^{(2)}(r)}{\partial n}\cdot p^{(1)}(r)\right] dS. \tag{8}$$

Интегрирование в правой части выражения (8) производится по поверхности оболочки и бесконечно удаленной сферы. В силу условия излучения, интеграл по поверхности бесконечно удаленной сферы равен нулю, а для интеграла по поверхности оболочки, используя краевые условия (2), (3), (5) и (6) и условие самосопряженности оператора L, получим:

$$p^{(1)}(r_1) = \frac{1}{Q_0^{(2)}}\int_S \frac{\partial p^{(2)}(r)}{\partial n}\, F^{(1)}(r)\, dS. \tag{9}$$

Из (9) следует, что если известно дифракционное поле точечного источника, помещенного в некоторую точку r_1 окружающего оболочку пространства, то соотношение (9) описывает решение задачи излучения звука оболочкой в той же точке r_1, где был помещен источник. Другими словами, используя соотношение (9), можно получить решение задачи об излучении звука оболочкой или пластинкой, не решая краевой задачи, если уже известно решение соответствующей дифракционной задачи.

Если излучаемое поле определяется на расстоянии R, большом по сравнению с длиной волны и размерами тела, то дифракционное поле в области, занятой оболочкой, можно рассматривать как результат дифракции плоской волны $p_i^{(2)}(r)$, и соотношение (9) принимает вид:

$$p^{(1)}(r_1) \simeq \frac{e^{ikR}}{4\pi R\, |p_i^{(2)}|}\int_S \frac{\partial p^{(2)}(r)}{\partial n}\, F^{(1)}(r)\, dS. \tag{10}$$

В качестве примера рассмотрим излучение звука замкнутой сферической оболочкой под действием гармонической силы вида:

$$F^{(1)}(\theta) = \begin{cases} F_0 \exp[i\gamma \cos\theta a], & 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \\ 0 & , \theta_0 < \theta < \pi. \end{cases} \quad (11)$$

Для нормальной производной давления в дифракционном поле плоской волны на поверхности оболочки получим [1]:

$$\left.\frac{\partial p^{(2)}(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a} = \rho c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m (2m+1)}{ka^2 (Z_m + Z_{mm})} \frac{P_m(\cos\theta)}{h_m^{\prime(1)}(ka)}, \quad (12^*)$$

где

$$Z_m = \frac{iEh}{2\pi(1-\nu^2)\omega a^2} \frac{[2(1+\nu)-l^2][m(m+1)-1+\nu-l^2]-(1+\nu)^2(m+1)m}{m(m+1)-1+\nu-l^2}; \quad (13)$$

$$Z_{mm} = i\rho c \frac{h_m^{(1)}(ka)}{h_m^{\prime(1)}(ka)}. \quad (14)$$

Подставляя (11) и (12) в (10), найдем для поля излучения:

$$p^{(1)}(r,\theta) \simeq \frac{F_0 \pi\rho c \exp[ikR]}{kR} \sum_{m,\,n=0}^{\infty} \frac{i^{n-m}(2m+1)(2n+1)\, j_n(\gamma a)}{(Z_m + Z_{mm})\, h_m^{\prime(1)}(ka)} \times$$

$$\times \left[\frac{\sin^2\theta_0\, P_m^{\prime}(\cos\theta_0)}{m+n+1}\right]\left[\frac{P_n(\cos\theta_0)}{n-m}\right]. \quad (15)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Лямшев. Теоретические и экспериментальные исследования рассеяния звука тонкими упругими оболочками и пластинками. Отчет Акуст. ин-та АН СССР. М., 1958.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
24 мая 1958 г.

* В выражении (12) и ниже E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $l^2 \equiv \omega^2 a^2 (1-\nu^2)\rho_1 / E$, ρ_1 — плотность материала, h — толщина и a — радиус оболочки. $j_n(\alpha)$, $h_n^{(1)}(\alpha)$ — сферические функции Бесселя и Ганкеля первого рода, $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, штрих означает дифференцирование по аргументу.