К ВОПРОСУ О ЗАТУХАНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В СМЕСЯХ

Я. З. Клейман

При распространении волн в смесях, аналогично случаю однокомпонентной среды, сказывается эффект вязкости компонент, составляющих данную смесь. Влияние вязкости относится к числу таких эффектов, которые можно иногда приближенно исследовать, рассматривая смесь как однокомпонентную среду с некоторыми средними параметрами (параметрами смеси).

Однако затухание волн в смесях обусловлено не только вязкостью каждой компоненты, а и трением между компонентами, поскольку при распространении волн частицы различных компонент в данной точке приобретают в общем случае разные скорости. Очевидно, что этот эффект не может быть изучен в рамках теории однокомпонентной среды, не учитывающей относительного движения компонент.

Для исследования влияния относительного движения компонент рассмотрим в акустическом приближении затухание плоских гармонических волн в двухкомпонентной дисперсной среде только за счет трения, обусловленного разностью скоростей компонент; вязкостью каждой компоненты будем пренебрегать.

Некоторыми авторами (например, [1, 2]) аналогичные исследования проводились для случая взвесей. Рассматривалась смесь, состоящая из среды-носителя, в котором взвешены дискретные частицы другого вещества, и изучалось затухание гармонических волн, вызванное диссипацией энергии, обусловленной относительным движением частиц в среде. Результаты теории [1] удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными для таких смесей, как эмульсии [2]. В этой теории частицы предполагались сферическими, весьма малыми, абсолютно жесткими и ламинарно обтекающимися; при составлении уравнения движения для и н д и в и д у а л ь н о й частицы учитывались действующая на нее сила, обусловленная наличием в среде градиента давления (приближенно), и сила сопротивления среды (зависящая от относительных скоростей и ускорений). В теории [1] нет в полной мере учета передачи импульса непосредственно от частицы к частице (в отличие от учета обмена импульсом между частицей и средой); кроме того считается, что скорость звука равна, как и в однокомпонентной среде, величине $\sqrt{dp/d\rho}$ (ρ — плотность носителя.) Очевидно, что рассматриваемую теорию (как указывают сами авторы [1]) можно применять к смесям с достаточно малой концентрацией несжимаемых частиц (т. е. к «достаточно разведенным системам»).

Представляет интерес исследование затухания волн в более общем случае дисперсных смесей с произвольными концентрациями компонент, когда обе компоненты следует считать «равноправными» (т. е. учитывать сжимаемость обеих компонент, передачу импульса внутри каждой компоненты и т. д.). Тогда обе компоненты целесообразно рассматривать, как сплошные взаимнопроникающие среды. Ограничимся рассмотрением таких сред, для которых давление в каждой точке может быть принято общим для обеих компонент. Система уравнений, описывающих движение таких смесей, получена в работе [3], где из сил взаимодействия между компонентами учтены силы, обусловленные переменностью сечения трубки тока (изменением пористости вдоль линии тока), и силы, зависящие от относительных скоростей. Линеаризируя эти уравнения около состояния покоя, будем иметь для случая двухкомпонентной среды:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{1}{\rho_{01}^{0}}\frac{\partial p'}{\partial x}-\frac{K}{\rho_{01}}(v_2-v_1)=0, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{1}{\rho_{02}^{0}}\frac{\partial p'}{\partial x}-\frac{K}{\rho_{02}}(v_1-v_2)=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_1'}{\partial t}+\rho_{01}\frac{\partial v_1}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial \rho_2'}{\partial t}+\rho_{02}\frac{\partial v_2}{\partial x}=0, \tag{2}$$

$$p'=a_{01}^{2}\rho_1^{0'}, \qquad p'=a_{02}^{2}\rho_2^{0'}, \tag{3}$$

$$\frac{\rho_1'}{\rho_{01}^{0}}+\frac{\rho_2'}{\rho_{02}^{0}}-\frac{\rho_{01}}{\rho_{01}^{02}}\rho_1^{0'}-\frac{\rho_{02}}{\rho_{02}^{02}}\rho_2^{0'}= \tag{4}$$

Здесь ρ_{01}^{0}, ρ_{01}, ρ_{02}^{0}, ρ_{02} — истинные и приведенные* плотности компонент в невозмущенном состоянии, $\rho_1^{0'}$, ρ_1', $\rho_2^{0'}$, ρ_2' — приращения этих параметров при движении смеси, p' — приращение давления, v_1 и v_2 — скорости компонент, K — коэффициент взаимодействия.

Величины a_{01}^{2} и a_{02}^{2} являются известными, поскольку зависимости между давлением и истинными плотностями компонент считаем заданными.

---

* Приведенная плотность компоненты,— это такая плотность, которую имела бы данная компонента, содержащаяся в некотором объеме смеси, если бы она одна занимала весь этот объем.

Уравнение (4) при помощи (3) запишем в виде

$$\xi p' = \frac{\rho_1}{\rho_{01}^0} + \frac{\rho_2}{\rho_{02}^0} \quad \left(\xi = \frac{\rho_{01}}{\rho_{01}^{02} a_{01}^2} + \frac{\rho_{02}}{\rho_{02}^{02} a_{02}^2}\right). \tag{5}$$

Введем обозначения

$$u = v_1 \rho_{01}/\rho_{01}^0 + v_2 \rho_{02}/\rho_{02}^0, \qquad w = v_2 - v_1. \tag{6}$$

Тогда, умножая члены первого уравнения (1) на ρ_{01}/ρ_{01}^0, а члены второго — на ρ_{02}/ρ_{02}^0 и складывая оба уравнения, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma \frac{\partial p'}{\partial x} + K\delta w = 0 \quad \left(\sigma = \frac{\rho_{01}}{\rho_{01}^{02}} + \frac{\rho_{02}}{\rho_{02}^{02}},\ \delta = \frac{1}{\rho_{02}^0} - \frac{1}{\rho_{01}^0}\right), \tag{7}$$

а поделив члены первого уравнения (2) на ρ_{01}^0, а второго — на ρ_{02}^0 и складывая их, получим, в силу (5),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \xi \frac{\partial p'}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Вычитая из второго уравнения (1) первое уравнение, имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \delta \frac{\partial p'}{\partial x} + K\eta w = 0 \quad \left(\eta = \frac{1}{\rho_{01}} + \frac{1}{\rho_{02}}\right). \tag{9}$$

Исключая w из уравнений (7) и (9), получим при помощи (8)

$$\frac{\partial^3 p'}{\partial t^3} - a_*^2 \frac{\partial^3 p'}{\partial x^2 \partial t} + K\eta \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{K}{\xi \rho_{01}\rho_{02}} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0, \tag{10}$$

где $a_* = \sqrt{\sigma/\xi}$ — скорость распространения волны слабого разрыва в смеси (см. [4]).

Пусть в начале координат ($x = 0$) имеется источник гармонических колебаний, около которого давление изменяется по закону

$$p'(0, t) = A \cos \omega t. \tag{11}$$

Решения уравнения (10) будем искать в виде

$$p' = A e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \beta x)},$$

где β и α (коэффициент затухания) подлежат определению. Подставляя это выражение в (10), получим

$$(i\omega)^3 - a_*^2 (i\omega)(i\beta + \alpha)^2 + K\eta (i\omega)^2 - \frac{K}{\xi \rho_{01}\rho_{02}} (i\beta + \alpha)^2 = 0.$$

Отделяя действительные и мнимые части, получаем выражения:

$$\alpha\beta = \frac{K\delta^2\omega}{2\sigma a_*^2 \varkappa_1} \quad \left(\varkappa_1 = 1 + \frac{K^2}{\rho_{01}^2 \rho_{02}^2 \omega^2 \sigma^2}\right),$$
$$\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{\omega^2 \varkappa_2}{a_*^2 \varkappa_1} \quad \left(\varkappa_2 = 1 + \frac{K^2 \eta}{\omega^2 \sigma \rho_{01}\rho_{02}}\right) \tag{12}$$

и, следовательно

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{2a_*^2 \varkappa_1}\left(\varkappa_2 + \sqrt{\varkappa_2^2 + \frac{K^2\delta^4}{\sigma^2\omega^2}}\right). \tag{13}$$

Величина α определяется из (12).

Если величина K/ω достаточно мала, т. е. мало трение между компонентами или велика частота колебаний (например, ультразвук), то, пренебрегая в выражениях (12), (13) квадратом этой величины, имеем

$$\beta = \frac{\omega}{a_*}, \quad \alpha = \frac{K\delta^2}{2\sigma a_*}.$$

При этом приближении β не зависит от K, т. е. трение между компонентами не влияет на скорость распространения возмущений. Коэффициент затухания в этом случае не зависит от частоты колебаний. (В [1] коэффициент затухания также практически не будет зависеть от частоты при больших значениях ω, если в выражении для силы сопротивления оставить только члены, зависящие от относительной скорости; с ростом ω влияние членов, зависящих от относительного ускорения, возрастает).

Если различие между истинными плотностями компонент весьма мало *, то δ — малая величина, и можно приближенно считать, что $\sigma\eta = \frac{1}{\rho_{01}\rho_{02}}$. Тогда $\varkappa_1 = \varkappa_2$ и, пренебрегая вторым слагаемым подкоренного выражения в (13), имеем:

$$\beta = \frac{\omega}{a_*}, \quad \alpha = \frac{K\delta^2}{2\sigma a_* \, (1 + K^2\eta^2/\omega^2)}.$$

Итак, выражение для приращения давления, удовлетворяющее граничному условию (11), имеет вид:

$$p' = Ae^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x).$$

Напишем теперь выражения для скоростей компонент. Из уравнений (8) и (7) определяем выражения для u и w и, вспоминая обозначения (6), получаем

$$v_1 = \frac{A\xi}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha x} \left[\left(\beta\omega - \frac{\rho_{02}\alpha_*}{\rho_{02}^0 K\delta} \right) \cos(\omega t - \beta x) - \left(\alpha\omega + \frac{\rho_{02}\beta_*}{\rho_{02}^0 K\delta} \right) \sin(\omega t - \beta x) \right] + F_1(t),$$

$$v_2 = \frac{A\xi}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha x} \left[\left(\beta\omega + \frac{\rho_{01}\alpha_*}{\rho_{01}^0 K\delta} \right) \cos(\omega t - \beta x) - \left(\alpha\omega - \frac{\rho_{01}\beta_*}{\rho_{01}^0 K\delta} \right) \sin(\omega t - \beta x) \right] + F_2(t),$$

где $\alpha_* = \alpha\,[\omega^2 + a_*^2 (\alpha^2 + \beta^2)]$, $\beta_* = \beta\,[\omega^2 - a_*^2 (\alpha^2 + \beta^2)]$.

Функции времени $F_1(t)$ и $F_2(t)$ остаются неопределенными, так как в данном случае имеем задачу без начальных условий. Скорости v_1 и v_2, как следует из последних выражений, имеют тот же коэффициент затухания вдоль оси x, что и давление, но нулевые и экстремальные значения величинами v_1, v_2, p' достигаются неодновременно.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, В. В. Владимирский и М. Д. Галанин. Распространение звука в дисперсных системах. Ж. эксперим. и теоретич. физики, 1938, 8, 5, 614—621.
2. В. В. Владимирский и М. Д. Галанин. Поглощение ультразвука в водной эмульсии ртути. Ж. эксперим. и теоретич. физики, 1939, 9, 2, 233—236.
3. Х. А. Рахматулин. Основы газодинамики взаимнопроникающих движений сжимаемых сред. Прикл. матем. и механ., 1956, 20, 2, 184—195.
4. Я. З. Клейман. О распространении волн слабого разрыва в многокомпонентной среде. Акуст. ж., 1958, 4, 3, 253—262.

Институт механики АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
16 мая 1958 г.

О СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКА В ВОДЕ ВБЛИЗИ ТЕМПЕРАТУРЫ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

Н. Ф. Отпущенников

Как показывают исследования многих авторов [1—2], для всех чистых жидкостей, кроме воды, зависимость скорости ультразвука от температуры выражается простым линейным законом. Однако вблизи температуры затвердевания у некоторых веществ этот закон нарушается [3, 4, 5].

Автором [4—5] при исследовании большой группы органических веществ — нафталина, фенола, азобензола, нитробензола было показано, что аномальное поведение в скорости распространения ультразвука наблюдается в так называемой «предкристаллизационной области», которая расположена за 2—3° до температуры затвердевания.

Среди многих жидкостей, вода по своим физико-химическим свойствам является исключением, обладая рядом аномальных свойств, в частности, ее плотность максимальна при $t = +4°$ и уменьшается при более высокой и низкой температуре. Аномальное поведение плотности воды вблизи температуры затвердевания должно приводить к заметному изменению в ее структуре, а следовательно, и к изменению величины адиабатической сжимаемости.

---

* Этот случай часто встречается при экспериментальных исследованиях смесей, если хотят создать устойчивую механическую смесь макрочастиц.